

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Институт математики, физики и информационных технологий
Кафедра функционального анализа

УТВЕРЖДАЮ
Директор института математики,
физики и информационных технологий
И.Н. Якунина
«17» сентября 2019



ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ
по направлению подготовки магистров 01.04.01
«Математика»

Тамбов 2019

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Целями проведения вступительного испытания является:

- определения степени готовности выпускника к учебной и научной работе. Задачами вступительного испытания является проверка уровня сформированности общекультурных (универсальных) и профессиональных (общепрофессиональных, научно-исследовательских, научно-инновационных, организационно-управленческих, педагогических) компетенций.

Вступительные испытания при приеме для обучения по программам магистратуры проводятся в форме письменного экзамена (тестирования) по направлению подготовки магистров.

Целью проведения вступительного испытания является установление соответствия подготовки выпускника бакалавриата требованиям государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению 01.04.01 «Математика», уровня подготовки поступающего в магистратуру и определения степени готовности выпускника к учебной и научной работе.

2. ТРЕБОВАНИЯ К ЗНАНИЯМ И УМЕНИЯМ АБИТУРИЕНТОВ

К основным требованиям относятся наличие у абитуриентов личностных качеств, которые позволят им осуществлять следующие виды профессиональной деятельности: научно-исследовательская, научно-инновационная, организационно-управленческая, педагогическая (в установленном порядке в соответствии с полученной дополнительной квалификацией), а также сформированных общекультурных (универсальных) и профессиональных (общепрофессиональных, научно-исследовательских, научно-инновационных, организационно-управленческих, педагогических) компетенций.

Программа содержит основные и наиболее важные вопросы, имеющие теоретическое и практическое значение.

Экзаменуемые должны:

- **знать** основы общей алгебры и теории чисел; основные понятия теории дифференциальных уравнений, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений; определение комплексных чисел, элементарных функций, определение и основные свойства аналитических функций, интегралы и степенные ряды, ряд Фурье, особые точки, ряд Тейлора, конформные отображения, интегралы типа Коши, функциональные ряды; основные понятия, определения и свойства объектов математического анализа, формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их связи и приложения в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.
- **уметь** формулировать и доказывать теоремы, самостоятельно решать классические задачи общей алгебры, выводить формулы и производить вычисления по ним; выявлять связи между математическими объектами и доказывать теоремы; решать задачи вычислительного и теоретического характера в области дифференциальных уравнений; производить арифметические действия с комплексными числами, применять теорему Коши к решениям конкретных задач, вычислять производные и интегралы, исследовать функции на аналитичность, исследовать числовые и функциональные ряды на сходимость, разлагать функции в ряды Тейлора и Фурье, классифицировать особые точки,

вычислять интегралы, производить элементарные преобразования, вычислять интегралы типа Коши, решать дифференциальные уравнения; устанавливать сходимость последовательностей в функциональных метрических пространствах; доказывать утверждения математического анализа, решать задачи математического анализа, уметь применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

• **владеть** основными понятиями алгебры (группа, кольцо, поле, векторное пространство, линейная алгебра) и теории чисел (система натуральных чисел, простые числа, делимость, сравнения и их приложения); навыками решения систем линейных уравнений; основными понятиями теории множеств, теории пределов, непрерывности, производной и дифференциала, первообразной функции, определенного интеграла, сходимости рядов; техникой дифференцирования и интегрирования; векторным и координатным методами при изучении геометрии на плоскости и в пространстве; математическим аппаратом дифференциальных уравнений, методами решения задач и доказательства утверждений в этой области; математическим аппаратом комплексного анализа, методами решения задач и доказательства утверждений в этой области; навыками и приемами использования знаний в теоретических и практических целях.

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ (АННОТАЦИИ ТЕМ)

Тема 1. Системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений: основные понятия, равносильность систем, равносильные преобразования систем, решение систем методом Гаусса.

Тема 2. Теорема Кронекера-Капелли.

Теорема Кронекера-Капелли: критерии совместности системы уравнений и единственности решения.

Тема 3. Определители.

Определители: свойства, вычисление определителя разложением по строке (столбцу).

Тема 4. Группы.

Понятие группы, подгруппы. Теорема Лагранжа. Порядок элемента. Циклические группы.

Тема 5. Кольца и поля.

Кольцо, подкольцо. Гомоморфизмы колец. Типы колец. Поле. Изоморфизмы полей. Характеристика поля. Примеры.

Тема 6. Линейные пространства.

Основные понятия. Линейная зависимость векторов. Базис. Размерность. Координаты вектора в данном базисе. Изоморфизм линейных пространств одинаковой конечной размерности.

Тема 7. Подпространства линейного пространства.

Подпространства линейного пространства: их сумма и пересечение; прямая сумма подпространств. Линейная оболочка и ранг системы векторов.

Тема 8. Линейные операторы.

Линейные отображения векторных пространств, их задание матрицами. Ядро и образ линейного отображения. Условие существования обратного отображения. Линейные операторы; действия над ними. Матрица линейного оператора в различных базисах. Дефект и ранг линейного оператора.

Тема 9. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен и его корни. Связь корней характеристического многочлена с собственными значениями линейного оператора. Инвариантные и собственные подпространства.

Тема 10. Производная и дифференциал.

Производная и дифференциал. Теорема о линейном приближении. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа.

Тема 11. Максимумы и минимумы функций одного переменного.

Максимумы и минимумы функций одного переменного. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия существования экстремума.

Тема 12. Первообразная, неопределенный интеграл.

Первообразная, неопределенный интеграл. Свойства неопределенных интегралов. Замена переменной и интегрирование по частям.

Тема 13. Определенный интеграл.

Определенный интеграл. Классы интегрируемых функций. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница.

Тема 14. Функции нескольких переменных.

Функции нескольких переменных. Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал. Связь между гладкостью, дифференцируемостью, непрерывностью и существованием частных производных.

Тема 15. Максимумы и минимумы функций нескольких переменных.

Максимумы и минимумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.

Тема 16. Двойной интеграл.

Определение двойного интеграла. Необходимое условие существования двойного интеграла. Свойства двойного интеграла.

Тема 17. Числовой ряд.

Числовой ряд. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости ряда. Признаки сходимости рядов с положительными членами.

Тема 18. Знакопередающиеся ряды.

Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимости ряда.

Тема 19. Степенные ряды.

Степенные ряды. Промежуток сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда.

Тема 20. Ряд Тейлора.

Ряд Тейлора. Условия разложения функции в ряд Тейлора. Разложение основных элементарных функций в степенные ряды.

Тема 21. Ряды Фурье.

Ряды Фурье. Разложение в ряд Фурье кусочно-гладких функций.

Тема 22. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальные уравнения первого порядка. Различные типы уравнений (уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные).

Тема 23. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений однородного уравнения. Определитель Вронского.

Тема 24. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами: однородные и неоднородные.

Тема 25. Функции комплексного переменного.

Функции комплексного переменного. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости (условия Коши–Римана). Геометрический смысл модуля и аргумента производной.

Тема 26. Интеграл функции комплексного переменного.

Определение интеграла функции комплексного переменного. Связь с криволинейным интегралом. Интегральная теорема Коши.

Тема 27. Интегральная формула Коши.

Вывод интегральной формулы Коши.

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

1. Системы линейных уравнений. Равносильность систем. Равносильные преобразования систем. Решение систем методом Гаусса.
2. Теорема Кронекера-Капелли (критерий совместности системы уравнений). Критерий единственности решения.
3. Определители. Их свойства. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу).
4. Группы. Подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы.
5. Смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Нормальные делители. Фактор-группа. Теорема о гомоморфизмах.
6. Кольцо. Подкольцо. Гомоморфизмы колец. Типы колец. Поле. Изоморфизмы полей. Характеристика поля. Примеры.
7. Линейные пространства. Линейная зависимость векторов. Базис. Размерность. Координаты вектора в данном базисе. Изоморфизм линейных пространств одинаковой конечной размерности.
8. Подпространства линейного пространства; их сумма и пересечение; прямая сумма подпространств. Линейная оболочка и ранг системы векторов.
9. Линейные отображения векторных пространств, их задание матрицами. Ядро и образ линейного отображения. Условие существования обратного отображения. Линейные операторы; действия над ними. Матрица линейного оператора в различных базисах. Дефект и ранг линейного оператора.
10. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен и его корни. Связь корней характеристического многочлена с собственными значениями линейного оператора. Инвариантные и собственные подпространства.

11. Производная и дифференциал. Теорема о линейном приближении. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа.
12. Максимумы и минимумы функций одного переменного. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия существования экстремума.
13. Первообразная, неопределенный интеграл. Свойства неопределенных интегралов. Замена переменной и интегрирование по частям.
14. Определенный интеграл. Классы интегрируемых функций. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница.
15. Функции нескольких переменных. Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал. Связь между гладкостью, дифференцируемостью, непрерывностью и существованием частных производных.
16. Максимумы и минимумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.
17. Определение двойного интеграла. Необходимое условие существования двойного интеграла. Свойства двойного интеграла.
18. Числовой ряд. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости ряда. Признаки сходимости рядов с положительными членами.
19. Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимости ряда.
20. Степенные ряды. Промежуток сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда.
21. Ряд Тейлора. Условия разложения функции в ряд Тейлора. Разложение основных элементарных функций в степенные ряды.
22. Ряды Фурье. Разложение в ряд Фурье кусочно-гладких функций.
23. Дифференциальные уравнения первого порядка. Различные типы уравнений (уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные).
24. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений однородного уравнения. Определитель Вронского.
25. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами: однородные и неоднородные.
26. Функции комплексного переменного. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости (условия Коши–Римана). Геометрический смысл модуля и аргумента производной.
27. Определение интеграла функции комплексного переменного. Связь с криволинейным интегралом. Интегральная теорема Коши.
28. Интегральная формула Коши.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРОГРАММЫ

Во время подготовки к прохождению вступительных испытаний абитуриент повторяет материал, пройденный во время предшествующего обучения (бакалавриат/специалитет), изучает основную и дополнительную литературу, список которой представлен ниже, а также методические пособия, представленные в электронной библиотеке на сайте ТГУ имени Г.Р. Державина.

Основная литература:

1. Арнольд В.И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Наука, 2014.
2. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. М., Наука, 2015.
3. Зорич. В.А. Математический анализ ч.1,2 М.: Наука, 2011.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука, 2016.

5. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Физматлит, 2014.
6. Кудрявцев Л.Д., Курс математического анализа, т.1.2, М., 2012.
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 2011.
8. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 2014.
9. Петровский И.Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 2010.
10. Понтрягин Л.С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Наука, 2010.
11. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, М.: Наука, 2011.
12. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. М.: «ВШ», 2012.
13. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 2010.

Дополнительная литература:

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984
2. Бохан К.А. и др. Курс математического анализа, т.1 М: Просвещение, 1972.
3. Евграфов М.А. Аналитические функции. -М., Наука, 1991.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Основы математического анализа, ч. II, М.: Наука, 1973.
5. Камынин Л.И., Курс математического анализа, т.1.,2, МГУ, 1995.
6. Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. М.: ИЛ, 1963
7. Лаврентьев М.А, Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. -М., Наука, 1987.
8. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965.
9. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.
10. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука. 1970.
11. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций, М.: Наука, 1978.
12. Рисс Ф., Секёфальфи-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
13. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
14. Свешников А.Г., Тихонов А.Н., Теория функций комплексной переменной. М.: Наука. 1979.
15. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982
16. Смирнов В.И., Курс высшей математики, т.2
17. Степанов В.В., Курс дифференциальных уравнений, М., Гостехиздат, 1953.
18. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.1,2 М.: Просвещение, 1972.
19. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т 1,2,3, издание любое.
20. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. ч.1 - 2. М.: Наука, 1970.

Критерии оценивания вступительного испытания

Вступительное испытание (экзамен) проводится в форме тестирования (компьютерного). Вступительное испытание оценивается по 50-балльной шкале.

Продолжительность вступительного испытания – 60 минут.

Тест содержит 40 вопросов:

- 30 вопросов с одним правильным ответом. Правильный ответ – 1 балл.
- 10 вопросов с двумя правильными ответами. Правильный ответ – 2 балла.

Интервал успешности: 15-50 баллов.